ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Option M — MATHEMATIQUES I (4 h) — 1981

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nul, $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes. Pour toute fonction F définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et bornée, on pose $\|F\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(t)|$; pour toute fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et bornée, on pose $\|F\|_+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |F(t)|$.

On désigne par E l'espace vectoriel complexe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, ayant une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$. On désigne par E_+ l'espace vectoriel complexe des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et ayant une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}^+$.

La partie III est indépendante des parties I et II.

I-1) Soit $F \in E$, à valeurs réelles, F et F" étant bornées, $\|F\| \leq 1$, $\|F''\| \leq 8$. Démontrer que $|F'(0)| \leq 4$ (On pourra traiter d'abord le cas où $F(0) \geq 0$, $F'(0) \geq 0$ et établir alors que : $t\,F'(0) \leq 1 + 4t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Démontrer que F' est bornée et que $\|F'\| \leq 4$.

2) Démontrer que si $F \in E$ est à valeurs réelles, F et F" étant bornées, on a alors : F' bornée et $\|F'\|^2 \leq 2\|F\|\,\|F''\|$.

3) Démontrer que la propriété I-2) est encore vérifiée si F est à valeurs complexes. (On pourra utiliser pour $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $g = \mathrm{Re}\,\frac{F}{F'(t_0)}$). Démontrer que la propriété I-1) est encore vérifiée si F est à valeurs complexes.

4) Pour tout entier $n > 0$, soit g_n la fonction impaire, admettant 2 comme période, et telle que :

$$g_n(x) = 2nx \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \ ;$$

$$g_n(x) = 1 \text{ pour } \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n}$$

$$g_n(x) = 2n - 2nx \text{ pour } 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1.$$

On pose $h_n(t) = \int_{1/2}^{t} g_n(u)\,du$ et $F_n(x) = \int_0^x h_n(t)\,dt$.

a) Démontrer que F_n admet 2 comme période.

b) Démontrer que $F_n \in E$ pour tout n et que F_n, F'_n, F''_n sont bornées. Calculer $\|F_n\|$, $\|F'_n\|$, $\|F''_n\|$.

c) En déduire que dans I-2), le coefficient 2 est le plus petit α vérifiant : $\|F'\|^2 \leq \alpha \|F\|\,\|F''\|$ pour toute fonction $F \in E$ telle que F et F" soient bornées.

II- On rappelle que, dans $\mathbb{C}$, un compact est une partie fermée bornée. Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$; on dira qu'il est admissible s'il existe $F \in E$, non constante, à dérivée seconde bornée et telle que $F(\mathbb{R}) \subset K$. Pour tout compact admissible K, on note $\mathcal{A}(K)$ l'ensemble des $F \in E$ vérifiant les propriétés précédentes.

1) Démontrer que tout compact de $\mathbb{C}$, d'intérieur non vide, est admissible.

2) Démontrer que $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est admissible.

3) Donner un exemple de compact de $\mathbb{C}$, non vide, non réduit à un point, et non admissible.

.../...

4) K étant un compact admissible, démontrer que, si F appartient à $\mathcal{A}(K)$ alors F' est bornée.

5) Démontrer que, si K est un compact admissible et si F appartient à $\mathcal{A}(K)$, alors $\mathcal{T}(F) = \frac{\|F'\|}{\sqrt{\|F''\|}}$ existe. On pose :

$$\mathcal{L}(K) = \sup_{F \in \mathcal{A}(K)} \mathcal{T}(F) \quad \text{(finie ou } +\infty\text{)}$$

6) K' et K" étant deux compacts admissibles tels que $K' \subset K''$, quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{L}(K')$ et $\mathcal{L}(K'')$?

7) Montrer que si K est un segment de longueur $\ell > 0$, alors $\mathcal{L}(K) = \sqrt{\ell}$ (on pourra utiliser, pour une suite de fonctions $F_n \in E$ bien choisie, la suite $g_n = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \frac{F_n}{|F_n|}$

(a et b étant les extrémités du segment)).

8) On pose, pour tout réel R strictement positif, $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ Calculer $\mathcal{L}(D_R)$.

9) Démontrer que, pour tout compact admissible K, $\mathcal{L}(K)$ est fini.

10) Soit $g \in E$ telle que $|g(t)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, g" bornée, $\|g''\| \leq 1$; démontrer que $\|g'\| \leq 1$.
Calculer $\mathcal{L}(C_R)$ où $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$.

III-1) Soit $F \in E_+$, à valeurs réelles, F et F" étant bornées, $\|F\|_+ \leq 1$, $\|F''\|_+ \leq 8$. Démontrer que $|F'(0)| \leq 4\sqrt{2}$. (On pourra traiter d'abord le cas où $F'(0) \geq 0$). Démontrer que F' est bornée et que $\|F'\|_+ \leq 4\sqrt{2}$.

2) Soit $F \in E_+$, bornée à dérivée seconde bornée, à valeurs réelles. Démontrer que F' est bornée et que $\|F'\|_+^2 \leq 4 \|F\|_+ \|F''\|_+$.

3) Soit $F \in E_+$, à valeurs réelles vérifiant $\|F\|_+ \leq 1$, $\|F''\|_+ \leq 8$, $\|F'\|_+ = 4\sqrt{2}$.

a) Démontrer que $\|F\|_+ = 1$, $\|F''\|_+ = 8$.

b) On pose :
$K_1(t) = t$ pour $0 \leq t \leq 1/2$; $K_1(t) = t - 1$ pour $1/2 < t \leq 1$.
Pour $x \geq 1/2$, calculer $\int_0^1 K_1(t)\, F''(t+x-\frac{1}{2})\, dt$.

En déduire que, pour $x \geq 1/2$, on a $|F'(x)| \leq 4$.

c) Démontrer qu'il existe $\xi \geq 0$ tel que $|F'(\xi)| = 4\sqrt{2}$

d) Démontrer que, si $F'(\xi) = 4\sqrt{2}$, on a :

$$\text{pour } 0 \leq x \leq 1/\sqrt{2} \qquad F(x) = -1 + 4\sqrt{2}\, x - 4x^2$$

(on pourra utiliser g telle que $g(x) = F(x + \xi)$).

e) Démontrer qu'une telle fonction existe.

*****
***
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail